Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY

MANUAL PARA OS EDUCADORES MATHNA

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

	4-6 anos	7-10 anos	11-14 anos	15+ anos
Lógica	O desafio do semáforo	igol-edadiC	Gatos e cães	O meu ouro por favor
Simetria	A Mathina ganha imensos brinque-dos novos!	Mathina, o Jogo das Rosáceas e os Labirintos Mágicos	Carimbando frisos	O carrossel dos poliedros
Criptografia	As mensagens secretas	O papagaio que fala	O tesouro perdido	O homem no meio
Visualização espacial	O treinador de pássaros de fogo	Falando com o uni-dragão	A corrida da fénix	Os misteriosos insetos de fogo

INTRODUÇÃO

1. Desenvolvimento do Pensamento Lógico na Era da Resolução de Problemas

O século 21 é o século da resolução de problemas. As crianças beneficiam de terem cedo uma experiência da potência criativa do pensamento matemático pois as capacidades de pensamento matemático são necessárias para compreender e alcançar os desafios complexos da nossa era. No entanto, a educação escolar formal mostra ser menos capaz de comunicar a larga aplicação no dia a dia da Matemática e a beleza do pensamento matemático.
O mundo de histórias Mathina enfatiza a resolução de problemas através do pensamento matemático.

Oferecemos um ambiente inovador que inclui histórias chamativas com atividades digitais de resolução de problemas sobre:

- visualização espacial
- lógica
- criptografia e
- simetria

Estudos reafirmam que abordagens não formais ajudam os alunos a construir uma base de conhecimentos mais sofisticada ao fazerem experiências na pluralidade de situações matemáticas, tornando explícitas as ligações entre a matemática da vida diária e a matemática da escola [1]. O nosso objetivo é ligar abordagens não formais motivadoras, tais como integrando a narração de histórias e apps interativas, e o ensino formal da matemática.

O projeto Mathina, deste ponto de vista, está alinhado com os objetivos da política educacional da União Europeia, que destacam o uso efetivo de tecnologias digitais educacionais e recursos digitais na educação e no treino. Porém, uma série de inquéritos e estudos, levados a cabo, por exemplo, pela Comissão Europeia, a OCDE, e o Fórum Económico Mundial, mostram que ainda existe uma deficiência na integração das tecnologias digitais e recursos digitais nos sistemas educacionais europeus . Em parte, isto está relacionado com as capacidades digitais:

- as capacidades digitais são as capacidades técnicas necessárias para usar tecnologias digitais;
- as capacidades de navegação digital são um conjunto mais abrangente de capacidades necessárias para se ter sucesso no mundo digital, incluindo encontrar, fixar prioridades, e avaliar a qualidade e o nível de confiança da informação.

É, por conseguinte, crucial desenvolver atividades pedagógicas de matemática que possam ser facilmente integradas num largo espetro de ferramentas educacionais.

[1] Barron, B., Cayton-Hodges, G., Bofferding, L., Copple, C., Darling-Hammond, L., & Levine, M. H. (2011). Take a giant step: A blueprint for teaching young children in a digital age. Joan Ganz Cooney Center at Sesame Workshop.

2. Fazendo a Ponte entre Educação Matemática Formal e Não Formal

O projeto Mathina faz a ponte entre a educação matemática formal e não formal com o seu sistema modular e amigável para o utilizador. Este sistema pode ser acedido e apresentado em vários modos (em linha, localmente) e usado em vários dispositivos (smartphones, tablets, computadores de secretária, smartboards, etc.), dependendo do local e do fim a que se destina. As ferramentas Mathina permitem aos educadores guiar os jovens educandos através de uma diversidade de desafios matemáticos e ajudá-los a progredir seguindo os seus ritmos e caminhos de aprendizagem. Encoraja os educadores a respeitarem as necessidades individuais do educando. Além disso, o nosso projeto promove métodos novos de ensino, incluindo o uso de jogos e de narração de histórias, ao fornecer aplicações modulares alinhadas com os currículos escolares.

A inovação do projeto Mathina centra-se em fazer a ponte entre o ensino não formal e formal ao combinar quatro características principais:

1. fácil de usar
2. fácil de compreender
3. fácil de adaptar
4. fácil de incluir

3. O Mundo de Histórias Mathina para Participação na Resolução de Problemas

O envolvimento com as histórias e atividades Mathina parece-se mais com jogar do que com estudar. As personagens do mundo de histórias Mathina motivam as crianças, despertam-lhes o interesse, e promovem a integração da resolução de problemas com a narração de histórias de um modo emocionante e divertido.

Mathina implementa uma estrutura de narração de histórias com vários media para motivar e envolver as crianças na resolução de problemas, baseada no pensamento matemático, em várias áreas. A função primária das histórias, baseadas em problemas, do projeto Mathina é fornecer uma experiência complexa de envolvimento emocional no processo do desenvolvimento do pensamento. Um ambiente visual artístico complementa a narrativa baseada em texto com imagens e pequenas animações. Cada história oferece problemas interativos em apps, com as quais as crianças podem envolver-se seja individualmente, ou em grupos, com a ajuda, quando necessário, dos seus pais ou professores. As apps e a experiência visual aumentam a presença cognitiva das crianças e jovens no processo de desenvolvimento do pensamento. A presença social (entrar no mundo Mathina em pequenos grupos / partilhar experiências numa comunidade de alunos) e a presença educacional (entrar no mundo Mathina na companhia de um professor ou

[2] Kalogeras, S. (2014). Transmedia storytelling and the new era of media convergence in higher education. Springer.

pais) podem ter um efeito positivo no processo de aprendizagem, de acordo com o modelo da Inquirição Comunitária.
O Dr. Stavroula Kalogeras, autor do livro "Transmedia storytelling and the new era of media convergence in higher education" faz um sumário das bases científicas desta abordagem no vídeo disponível em

https://www.youtube.com/watch?v=MmngfqCKHFo

Resultados recentes da neurociência destacam os benefícios da aprendizagem através de histórias. Com base no modelo apresentado acima, Mathina oferece principalmente unidades de aprendizagem mais pequenas para atividades concentradas em períodos mais curtos, o que se designa por micro-aprendizagem. Desta forma o utilizador não precisa de ler todas as histórias no sistema para ficar com uma experiência abrangente de resolução de problemas. As histórias e as ferramentas do projeto Mathina estão disponíveis para vários grupos etários.

DESENVOLVIMENTO DE PENSAMENTO LÓGICO: AVENTURAS DA MATHINA NA CIDADE LOGI

1. Conceitos Matemáticos Principais Implementados nas Histórias

Tópico: Combinatória

Crianças na idade pré-escolar de 4-6 anos começam a desenvolver o pensamento lógico e ao mesmo tempo, o seu vocabulário está em explosão. Como parte do desenvolvimento das capacidades de pensamento matemático e de raciocínio das crianças, estas começam a aprender como usar estratégias de resolução de problemas e de raciocínio que não são inatas mas que emergem ainda com pouca idade como um núcleo das suas habilidades lógicas. Esta é a idade em que começa um número infindo de questões-"porquê". As crianças entusiasmam-se com conversas, interessam-se por pequenos problemas com palavras e de forma crescente com narrativas mais longas. Passam o tempo a explorar o seu ambiente, a distribuir coisas por vários conjuntos, entusiasmam-se com padrões e sequências, a fazer ligações, e a enumerar.

As crianças aprendem nesta idade a procurar estruturas e regularidades para ordenar, predizer e criar coesão. Padrões, funções e relações estão no núcleo das suas capacidades de pensamento matemático e raciocínio. Comparação, classificação e seriação formam um entorno destas capacidades nucleares, pensamento analítico básico e estratégias iniciais de resolução de problemas. Problemas mais simples com suporte combinatório – com a participação de professores ou adultos – encorajam o desenvolvimento simultâneo de capacidades matemáticas e o reconhecimento de outras interligações entre várias categorias de capacidades (por exemplo, pensamento matemático e capacidades de raciocínio, capacidades numéricas, capacidades de pensamento espacial).

Tópico: Pensamento "para trás"

Nas idades de 6-7 anos, embora as crianças não sejam ainda capazes de um pensamento totalmente lógico, começam a desenvolvê-lo. Conseguem classificar e ordenar objetos de várias maneiras, cada vez mais independentemente, e as suas habilidades de reconhecimento e criação de padrões estão em grande desenvolvimento. Estas são capacidades essenciais a desenvolver antes de lhes serem apresentados problemas matemáticos mais complexos que requerem abordagens criativas.

A partir dos 8 anos, as crianças já aplicam lógica e raciocínio em certos acontecimentos à sua volta. Raciocínio hipotético é uma habilidade importante, que requere o desenvolvimento da memória, a atenção e a criatividade. Pensamento "para trás" é um processo cognitivo, que pode ter um papel importante na obtenção de ideias criativas, de modo semelhante ao pensamento associativo e analógico.

Tópico: O problema da galeria de arte

Crianças de idades 11-14 anos, entram no mundo das operações formais. Já pensam lógica e estrategicamente, aplicando métodos, e são também capazes de implementar lógica dedutiva (i.e. raciocinando com base em uma ou mais asserções por forma a atingir uma conclusão lógica). Pensamento preditivo e pensamento abstrato desenvolvem-se rapidamente nesta idade, tal como a metacognição (auto-reflexão, consciência e compreensão do seu próprio processo de pensamento), os quais se tornam uma base crucial para a resolução de problemas.

Tópico: A regra de divisibilidade
As habilidades cognitivas dos **adolescentes** aumentam com capacidades analíticas e de argumentação. A abordagem lógica à resolução de problemas é suportada pelos avanços na colocação de questões. Probabilidade, estatística, representação de dados, e cálculos complexos ajudam a resolver problemas e situações complexas. Há também melhorias na compreensão de equações.

2. Apps Digitais para Resolução Interativa de Problemas

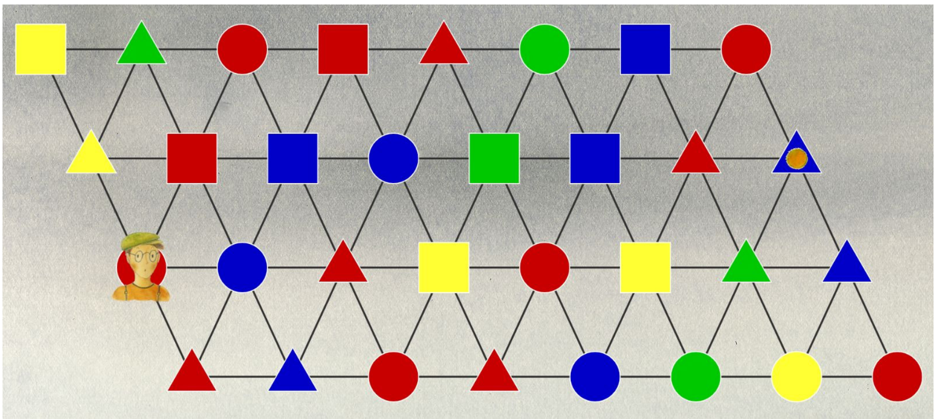
O desafio das luzes de trânsito
Tópico Matemático: Combinatória

Dado que este grupo etário não está ainda pronto para ler uma história sem a ajuda de um adulto, há várias formas para a usar no âmbito pré-escolar ou de uma escola de primeiro ciclo. Claro que o professor poderá ler alto a história às crianças e ajudá-las a usar as apps. É também possível pensar em usar a app como um modelo que suporta o processo de pensamento. As crianças com um sentido visual desenvolvido chegarão ao objetivo com a ajuda do professor. Alunos cinestéticos poderão ter como ajuda encenar o problema jogando com outras crianças ou familiares que, por exemplo, mostram um papel colorido representando cada cor. As crianças podem, para representar cada caso, trocar as posições dos atores, e a associação de cores às pessoas

pode aumentar a diversão no processo de resolução do problema.

A armadilha do piso de mosaicos
Tópico Matemático: Pensamento "para trás"

É típico deste grupo etário o desenvolvimento de novas capacidades como a lógica e o raciocínio. Nesta história "A armadilha do piso de mosaicos" o processo de resolução de problemas é desafiado por uma alteração criativa, nomeadamente, o pensamento em sentido inverso, que pode motivar as crianças a descobrir um novo e sistemático método de pensamento, enquanto participam nas atividades de resolução de problemas.



Gatos e cães
Tópico matemático: problema da galeria de arte

Mergulhar na história "Gatos e cães" requer pensamento preditivo, pensamento abstrato, metacognição, a habilidade para refletir sobre o seu próprio método de pensamento, e também a habilidade para generalizar o pensamento lógico a um contexto geométrico.

O meu ouro, por favor!
Tópico matemático: regra de divisibilidade

Para resolver o problema apresentado na história "O meu ouro, por favor!" são necessárias capacidades analíticas e de argumentação.

Número do jogador	Quantidade restante para dar	Valor recebido na primeira rodada	Quantidade restante para dar	Valor recebido na segunda rodada	Valor total recebido
Jogador 1	123	6			
Jogador 2	117	9			
Jogador 3	108	9			
Jogador 4	99	[redacted]			

3. Formas de continuar o desenvolvimento do pensamento

George Polya, pioneiro das didáticas da resolução de problemas, sugeriu, no seu livro famoso “How to Solve It”, um processo em quatro passos para tratar problemas:

(1) Compreender o problema
(2) Criar um plano
(3) Executar o plano
(4) Examinar o resultado

Educadores e estudantes podem implementar este esquema em qualquer problema matemático do Projeto Mathina, ou outro.

Quando as crianças dão uma resposta errada, em vez de imediatamente corrigir a solução e apontar-lhes o erro, é habitualmente crucial responder positivamente apreciando o esforço feito e examinando o processo de pensamento com as crianças.
A reflexão pode ser iniciada assim:

- Estás a dizer que...?
- Pelo que percebi, estás a concluir que...
- Estou a ver, então pensas que...
- O que te levou a pensar dessa forma?

Para desenvolver capacidades lógicas em idades pré-escolares, os educadores podem usar jogos de ordenação com objetos reais (objetos de uso diário, brinquedos, formas geométricas, etc.) ou imagens. A ordenação pode ser baseada, por exemplo, no tamanho, na cor, na dimensão ou noutras características. Jogos interessantes podem ser inventados com base em padrões rítmicos de bater palmas, padrões de danças, ou criando padrões com objetos físicos. Criando problemas de modelação por encenação pode ser também muito divertido.
Para crianças nas idades 5-7, a predição de padrões oferece oportunidades entusiasmantes de desenvolver capacidades de pensamento. Blocos, pedras coloridas, formas em papel colorido, frutos, vegetais ou outro qualquer conjunto de objetos pode ser usado para criar padrões. As crianças podem-se desafiar entre si (e também os seus professores) a continuar um padrão. Para idades 6-7, pode-se atribuir números aos padrões. É também possível criar padrões para os quais há mais de uma resposta. Pode-se começar por jogos de adivinhas - também com números, por exemplo, ligados ao número de anos, número de objetos num ambiente, de edifícios, de animais, de plantas ou outros objetos de uso diário - para desenvolver as capacidades de formular perguntas, de classificação, e de argumentação. Participação nas tarefas domésticas, como pôr em ordem brinquedos, objetos de uso diário, fazer a cama, cozinhar, assar, arrumar talheres, abrir a cama, podem também ser muito úteis no desenvolvimento de capacidades de pensamento.
Crianças de idades 11-14 conseguem identificar, explorar e explicar padrões mais complexos, também num contexto matemático e geométrico. Por exemplo, frações podem ser representadas numa linha numerada, como uma porção de uma forma geométrica (círculo, quadrado, triângulo, etc.), num diagrama

em fita, ou diagramas de barras. Criando listas sistemáticas e identificando sub-problemas quando se trabalha num problema complexo pode ajudar a desenvolver capacidade de pensamento e a obter uma experiência sólida em implementar várias estratégias de resolução de problemas.

Adolescentes de 14-18 anos conseguem explorar problemas reais, tais como planear compras no fim de uma época de saldos, planear investimentos, ou compreender processos do mundo real com a ajuda de diagramas e análise de dados. Podem tentar inventar quebra-cabeças lógicos, criar jogos de tabuleiro sobre certos problemas relacionados com os seus interesses e estudos, analisar se um sistema de votação é equitativo, explorar sistemas complexos, ambientais ou tecnológicos.

Bibliografia

- Germain-Williams, T. (2017). Teaching Children to Love Problem Solving. A Reference from Birth through Adulthood. World Scientific.
- Parviainen, P. (2019). The Development of Early Mathematical Skills – A Theoretical Framework for a Holistic Model. Journal of Early Childhood Education Research Volume 8 Issue 1 2019, 162–191.
- Polya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

SIMETRIA E POLIEDROS: MATHINA NA FEIRA DA SIMETRIA

1. Conceitos Matemáticos Principais Implementados nas Histórias

Tópico: Simetria de Reflexão

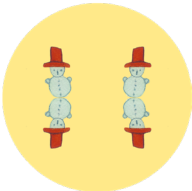
Para o grupo etário dos 4-6 anos, o objetivo principal é explorar, de uma forma empírica, a simetria que é familiar até para crianças pequenas: a simetria do "espelho". Se nos ficarmos pelo plano, isto significa verificar se uma imagem tem, ou não, eixos de simetria.

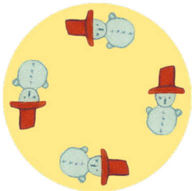
Para simplificar, são considerados apenas eixos de simetria verticais e horizontais.

Tópico: Simetrias de Reflexão e de Rotação

No grupo etário dos 7-10, as crianças aprendem mais sobre a simetria de reflexão[1]. Familiarizam-se também com a simetria de rotação. Portanto, conceitos como – a noção de **simetria, propriedades relacionadas com reflexão e rotação**, e classificação de rosáceas de acordo com as suas simetrias – podem ser explorados.

Tomamos por **simetria de uma figura** uma **isometria**, i.e. uma função que preserva as distâncias, que envia a figura exatamente sobre si própria, por forma que o aspeto seja o mesmo antes e depois da transformação: não deve ser possível distinguir a figura inicial da final (nem em termos de forma, nem de posição, nem de cor).





As duas rosáceas acima podem parecer semelhantes, mas têm diferenças significativas em termos das suas simetrias: enquanto a da esquerda tem simetrias de reflexão – e é dita **diedral** – a da direita não tem – é uma rosácea **cíclica**.

E podemos diferenciar rosáceas diedrais pelo número de simetrias de reflexão que possuem (por exemplo, a rosácea da esquerda tem 2 eixos de simetria, e é descrita como uma D2). De modo semelhante, podemos classificar as rosáceas cíclicas de acordo com o número de simetrias de rotação (a da direita é uma C4).

Tópico: Simetrias de Reflexão, de Rotação, de Reflexão Deslizante e Translação

No grupo etário dos 11-14, para além da reflexão e da rotação, os jovens conseguem também lidar com duas isometrias menos "intuitivas"[2]: a translação e a reflexão deslizante.

Quanto à noção de simetria, consideramos a apresentada na última subsecção (Simetrias de Reflexão e de Rotação).

Assim que sejam conhecidas as 4 isometrias no plano – **Reflexão Rotação, Translação e Reflexão Deslizante** [3]–, as crianças podem começar a explorar as simetrias dos frisos.

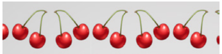
E há um resultado importante e notável sobre a simetria dos frisos: embora

[1] Com efeito, a simetria de reflexão é um assunto tratado com detalhe no programa português de Matemática para o "primeiro ciclo" (6/9 anos). Por outro lado, embora a simetria de rotação apenas esteja incluída no programa do 6º ano (alunos com 11 anos), já esteve, há alguns anos, incluído no programa português de Matemática do primeiro ciclo.

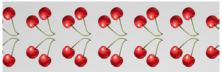
[2] Note-se que todas as isometrias mencionadas são exploradas no programa português de Matemática para o "3º ciclo" (12/14 anos).

[3] É possível provar que, no plano, não há outras isometrias.

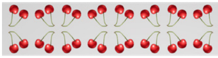
possamos produzir uma enorme variedade de frisos, existem apenas **7 tipos de frisos com simetrias diferentes**. A prova deste resultado surpreendente não está ao alcance das crianças de 11-14. No entanto, compreender as diferenças entre os 7 tipos de frisos e classificá-los de acordo com a sua simetria é uma matéria que pode ser explorada pelas crianças, de um modo divertido. Na tabela seguinte pode-se ver exemplos dos 7 tipos de frisos e uma lista das simetrias correspondentes.



Translações, Reflexões verticais



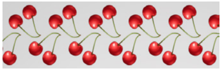
Translações, Reflexão horizontal, Reflexões deslizantes



Translações, Reflexões verticais, Reflexão horizontal, Rotações, Reflexões deslizantes

Translações, Rotações

Translações, Reflexões verticais, Rotações, Reflexões deslizantes



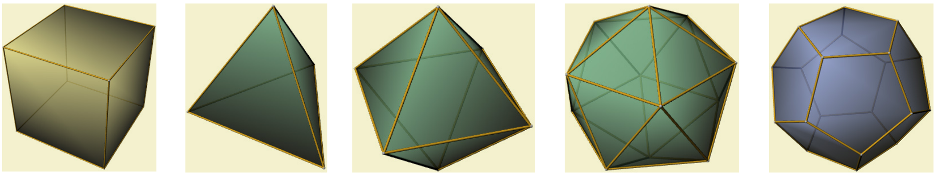
Translações, Reflexões deslizantes

Translações

Tópico: Simetria e Poliedros

O raciocínio tridimensional é uma capacidade que é adquirida com a idade e, por isso, este assunto é apenas dirigido ao grupo etário mais velho: 15-19+. E centramo-nos num tipo específico de objetos 3D que são familiares aos adolescentes: **Poliedros**. Para isso, escolhemos duas classes de poliedros muito "simétricos": **Sólidos Platónicos e Poliedros Uniformes.**

Um **sólido Platónico** é um poliedro que é "tão regular quanto possível". Portanto, um sólido Platónico deverá satisfazer as seguintes propriedades:

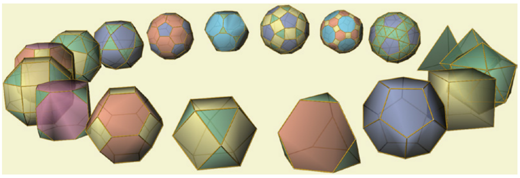


- as faces têm de ser todas polígonos regulares e iguais entre si (o mesmo número de arestas, todas do mesmo comprimento, e com ângulos iguais);
- em cada vértice encontram-se um mesmo número de faces;
- os ângulos diedrais, i.e. os ângulos entre faces contíguas, são iguais;
- os ângulos sólidos em cada vértice são iguais.

Há apenas 5 sólidos Platónicos (imagem acima): o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro, E é possível, de uma forma construtiva, levar os adolescentes a obter todos os sólidos Platónicos e a concluir que não há outros. Depois de explorar os sólidos Platónicos, podemos passar aos poliedros uniformes. Um poliedro uniforme é um poliedro:

- cujas faces são todas polígonos regulares, mas não todas com o mesmo número de lados;
- para cada par de vértices, existe pelo menos uma simetria do poliedro que leva um dos vértices no outro.

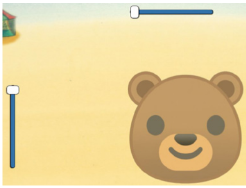
Ao contrário dos sólidos Platónicos, a classe dos poliedros uniformes não é



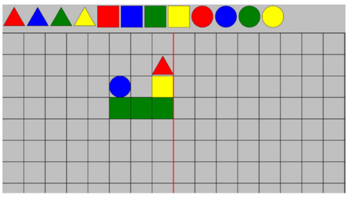
finita – inclui 1) uma família infinita de prismas, cujas bases são polígonos regulares e cujas faces laterais são quadrados; 2) uma família infinita de anti-prismas, cujas bases são polígonos regulares e cujas faces laterais são triângulos equiláteros; 3) 13 outros poliedros (imagem acima).

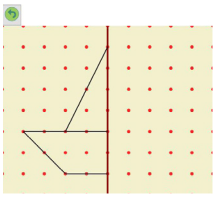
2. Apps para a Resolução Interativa de Problemas

Apps para o grupo etário 4-6
Tópico Matemático: Simetria de Reflexão
Como já referido, neste grupo etário a ideia é explorar a noção de eixo de simetria. Todas as apps têm este objetivo, mas apresentam diferentes níveis de dificuldade: nas apps 1.1 e 1.2, a criança deve verificar se uma dada imagem tem eixos de simetria, enquanto nas apps 1.3 e 1.4, a criança deve terminar, por si própria, a construção de imagens simétricas.
Relativamente às apps 1.1 e 1.2, a primeira pode ser vista como um modo de treino para a segunda; de facto, na app 1.1, a criança só tem de tratar de uma imagem de cada vez, enquanto, na app 1.2, várias imagens são apresentadas em simultâneo.
A app 1.4 é também mais difícil do que a app 1.3: nesta última, a criança precisa apenas de selecionar formas pré-existentes, enquanto na app 1.4, a criança deve terminar o desenho de imagens simétricas.

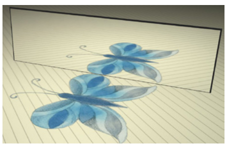

App 1.1

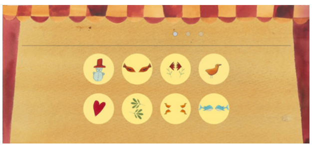

App 1.2

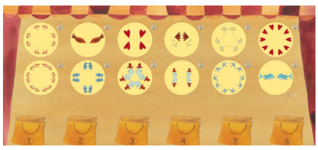

App 1.3


App 1.4

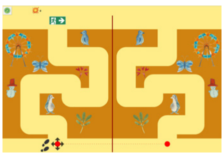
Apps para o grupo etário 7-10
Tópico Matemático: Simetrias de Reflexão e de Rotação
O objetivo da primeira app 2.1 é que as crianças verifiquem se uma dada imagem tem um eixo de simetria, usando um espelho.
As apps 2.2 – 2.4 são dedicadas a um assunto matemático tratado nesta secção: a classificação de rosáceas. Estas apps foram concebidas para guiar as

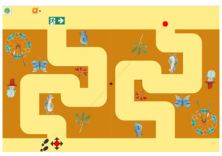

App 2.1


App 2.2


App 2.3


App 2.4


App 2.5

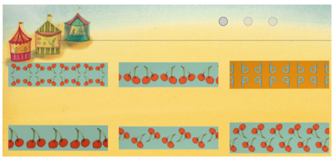

App 2.6

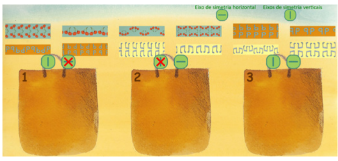
crianças nesse processo: com a app 2.2, as crianças treinam como distinguir entre rosáceas diedrais e rosáceas cíclicas. Por sua vez, as apps 2.3 e 2.4 são sobre a classificação de, respetivamente, as rosáceas diedrais e as cíclicas.
As apps 2.5 e 2.6 cobrem um outro assunto matemático tratado nesta secção – as propriedades matemáticas relacionadas com a reflexão e a rotação: enquanto a app 2.5 é sobre propriedades relacionadas com a reflexão, a app 2.6 contempla as rotações.

Apps para o grupo etário 11-14
Tópico Matemático: Simetrias de Reflexão, Rotação, Translação e Reflexão Deslizante. Classificação de Frisos

Todas as apps são dedicadas a classificar e carimbar frisos.
As apps 3.1 e 3.3 são de índole mais recreativa: o seu objetivo é mostrar como um cilindro ou uma placa podem carimbar frisos de um certo tipo.
Por outro lado, as apps 3.2 e 3.4 – 3.8 foram concebidas para guiar as crianças no processo de obterem os **7 tipos de frisos**: com a app 3.2, as crianças começam por separar os frisos com eixos de simetria. Depois, com a app 3.3, deparam-se com 3 classes diferentes de frisos de acordo com os eixos de simetria existentes (só horizontais, só verticais, ou ambos). A seguir, com a app 3.5, obtêm uma nova classe, ao separar os frisos com simetria de rotação dos restantes. Na app 3.6, dividem uma “classe de frisos” anterior em 2 novas classes (“simetria de reflexão + sem simetria de rotação” e “simetria de reflexão + com simetria de rotação”), chegando a um total de 5 classes de frisos. Finalmente, na app 3.7, ao separar os frisos com simetria de reflexão deslizantes, as crianças descobrem todos os possíveis tipos de frisos: num total de 7.
A app 3.8 é dedicada à sistematização do trabalho realizado até aqui: com ela as crianças devem encontrar, para cada uma das 7 classes de frisos, as simetrias que lhes estão associadas.

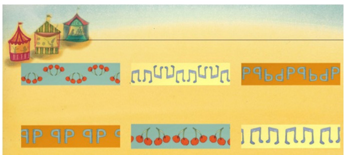

App 3.1

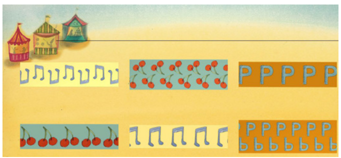

App 3.2

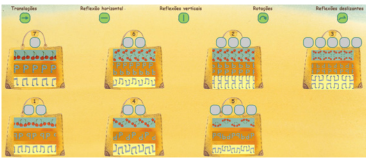

App 3.3


App 3.4

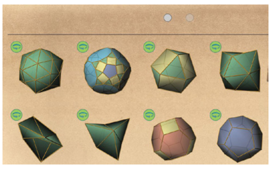

App 3.5

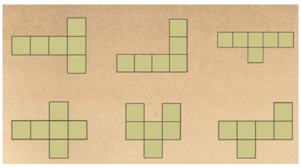

App 3.6

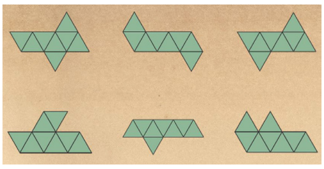

App 3.7

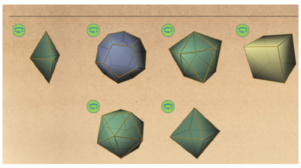

App 3.8

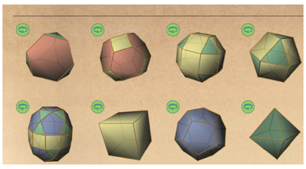
Apps para o grupo etário 15-19+
Tópico Matemático: Simetria e Poliedros


App 4.1


App 4.2


App 4.3


App 4.4


App 4.5

Todas as apps são dedicadas aos conceitos principais apresentados neste capítulo: classificação de poliedros e criação de planificações corretas para eles.
As apps 4.2 e 4.3 têm como objetivo encontrar boas planificações para, respetivamente, o cubo e o octaedro.
Por outro lado, as apps 4.1, 4.4 e 4.5 têm em vista a classificação de poliedros: depois de escolherem, num grupo de poliedros, os que são convexos, os adolescentes podem passar para "poliedros não platónicos cujas faces são todas regulares e com polígonos iguais". Esta app (4.4) tem por objetivo mostrar que, embora sendo possível encontrarmos poliedros semelhantes aos sólidos Platónicos, temos muito pouca escolha quando tentamos construir sólidos Platónicos.
Com a última app, os adolescentes familiarizam-se com os poliedros uniformes.

3. Indo mais além

Há vários tópicos que não são cobertos no Projeto Mathina, mas que estão ligados à área da simetria e que podem ser explorados por crianças/adolescentes. Listamos alguns exemplos abaixo.
Para o grupo etário 7-10, além das simetrias de rotação e de reflexão, é possível começar a trabalhar com a simetria de translação. Por isso, podem ser realizadas outras explorações envolvendo tipos "simples" de frisos (por exemplo, sem simetria de reflexão deslizante).
Para o grupo etário 11-14, podem também ser desenvolvidas experiências mais extensivas, envolvendo não só frisos, mas também a classificação de padrões (notar que, neste caso, devem ser consideradas translações em várias direções). No entanto, ao trabalhar com a simetria de padrões é conveniente ter cuidado na escolha de imagens, de forma a não desencorajar os jovens com exemplos demasiado complexos.
Para o grupo etário 15-19+, para além de geometria/simetria 3D, podem ser também desenvolvidas atividades relacionadas com simetria no plano, nomeadamente as relacionadas quer com frisos, quer com padrões.

CRIPTOGRAFIA: MATHINA NA ILHA DO CORSÁRIO

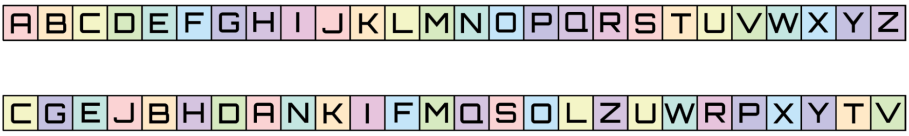
1. Conceitos Matemáticos Principais Implementados nas Histórias

Tópico: Introdução à criptografia

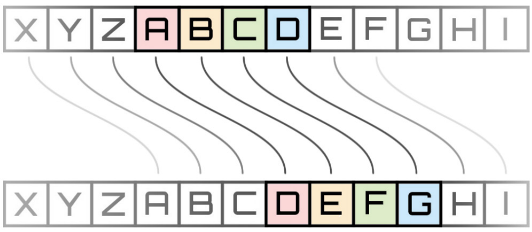
Para a faixa etária de 4 a 6 anos, o objetivo principal é explorar os **fundamentos da criptografia**, particularmente os conceitos de **chave** e de **método**. O foco está, pois, na abstração, particularmente na ideia de escolher um símbolo em vez de uma mensagem específica. Isso porque, nessa faixa etária, algumas crianças ainda não aprenderam a ler. Observe-se, no entanto, que as histórias e apps têm texto, e por conseguinte pode ser necessária a ajuda de um educador para completar a história.

Tópico: cifra de César

Na faixa etária de 7 a 10 anos, as crianças já aprenderam a ler, por isso é possível introduzir cifras alfabéticas, como a de César. O foco aqui é apresentar os conceitos de cifras de substituição e a ideia de que a chave particular para a cifra na história pode ser reduzida a uma única letra. O modo como as letras são associadas nas cifras de substituição é a **chave da cifra**, sendo uma mensagem cifrada substituindo cada letra pela letra correspondente dada pela chave. O processo para decifrar é o mesmo, usando a correspondência inversa. Por exemplo, com a chave da imagem a seguir, a palavra "MENSAGEM" é cifrada na palavra "MBQUCDBM".



Na sua forma original, a **cifra de César** associa a cada letra a terceira letra a seguir a ela no alfabeto: a letra "A" é associada à letra "D", "B" a "E" e assim por diante ... Isto pode ser generalizado usando, em vez de 3, como no original,



um número diferente. Para saber a chave, só precisamos saber o número de "saltos" que temos de fazer.

Este tópico é um pouco mais desenvolvido para a faixa etária de 11 a 14 anos. Os estudantes dessa faixa etária estão mais familiarizados com as operações aritméticas, por isso é possível aprofundar a análise da cifra de César. Em particular, podemos introduzir o conceito de **aritmética modular**. Na aritmética "módulo n" opera-se como na aritmética usual, mas, em certo sentido, usando apenas números entre 0 e n-1. Se tivermos dois números a e b escolhidos entre 0 e n-1, podemos adicioná-los, subtraí-los ou multiplicá-los. Para fazer isso, fazemos a operação normalmente e, em seguida, calculamos o resto da divisão inteira do número obtido por n: este será o resultado da operação na aritmética modular (dizemos, em linguagem matemática, que calculamos a soma, a diferença ou o produto "módulo n").

Tópico: Sistemas de troca de chaves

O grupo dos 15-19 anos adquiriu familiaridade suficiente com o raciocínio matemático relacionado com funções inversas e abstração, o que nos permite introduzir um sistema simples de troca de chaves. Optamos por cobrir o sistema de troca de chaves de **Diffie-Hellman**, que permite a obtenção de um segredo compartilhado por meio de um canal de comunicação público não cifrado. Este método é baseado nas chamadas "funções unidirecionais", isto é, funções invertíveis que são facilmente computáveis numa direção, mas extremamente difíceis de calcular na outra.

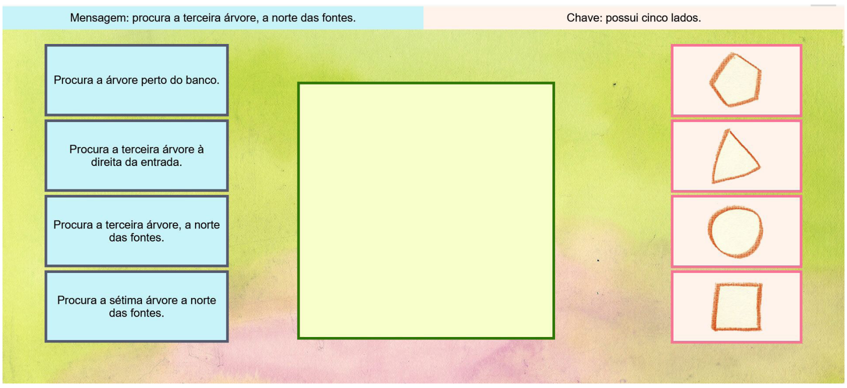
O método de Diffie-Helmann usa o logaritmo discreto, ou seja, o cálculo de logaritmos em aritmética modular, uma operação que é extremamente mais complexa do ponto de vista da dificuldade computacional do que a exponenciação (mesmo a discreta).

2. Apps Digitais para Resolução Interativa de Problemas

Apps para o grupo etário 4 a 6 anos

Tópico matemático: Introdução à criptografia

Como mencionado acima, nesta faixa etária a ideia é explorar os conceitos de chave e de método. Na App 1.1, o utilizador deve selecionar a mensagem correta (correspondente à que é dada) e encontrar a chave que é dada na forma de uma dica. As apps 1.2 e 1.3 expandem um pouco este tópico: na app 1.2 mais de uma imagem é apresentada e alguma ambiguidade é introduzida em relação à chave, já que a dica conduz a mais de uma chave correta, destacando a importância da clareza na comunicação matemática. Finalmente, a app 1.3 resume todos os conceitos: desta vez, os utilizadores devem encontrar a mensagem correta por meio da dica fornecida para a chave. As apps são apresentados com dificuldade crescente, propiciando a compreensão do tema.



Apps para o grupo etário 7 a 10 anos

Tópico matemático: a cifra de César (parte 1)

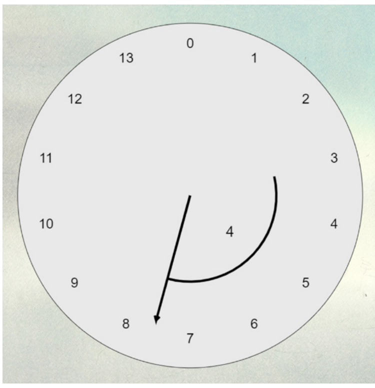
As apps 2.1 e 2.2 são dedicadas à introdução da cifra de César. Funcionam de um modo semelhante, mas oposto, sendo que a app 2.1 é usada para cifrar e a app 2.2 para decifrar uma mensagem oculta.

O objetivo combinado destas duas apps é destacar o conceito de chave e adquirir prática de cifrar e decifrar mensagens. Se usado em sala de aula, é possível

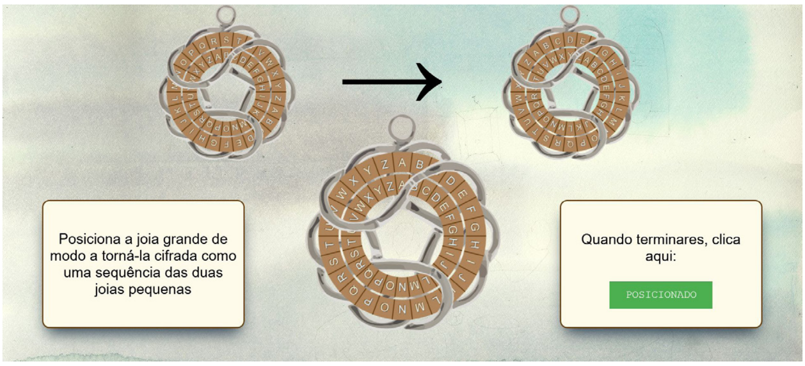
descartar as mensagens fornecidas e usar apenas a parte intermediária das apps com mensagens personalizadas.

Apps para o grupo etário 11 a 14 anos
Tópico matemático: a cifra de César (parte 2) e a aritmética modular

As apps 3.1 e 3.2 são conceitualmente semelhantes às apps 2.1 e 2.2, proporcionando a mesma experiência, mas com um nível de dificuldade maior, refletindo a faixa etária mais avançada. Na app 3.3, é apresentado o conceito de aritmética modular, observando que escolher uma chave para a cifra de César significa escolher um número de 1 a 25 como chave. Isso deixa apenas 25 tentativas para um intruso quebrar a mensagem. Portanto, um ataque de "força bruta" é perfeitamente exequível.



As apps 3.4 e 3.5 mostram que a cifra de César não se torna mais segura se aplicada duas vezes consecutivas (isso é verificado usando as propriedades da aritmética modular), em particular na app 3.4 a cifra de César é usada duas vezes consecutivas, enquanto na app 3.5 é mostrada a equivalência disso a usá-la uma só vez.



Com base nisso, as apps 3.6 e 3.7 apresentam ao estudante um tipo diferente de cifra, com uma mensagem que não pode ser decifrada por métodos conhecidos. As apps 3.8 e 3.9 são usadas para tentar alguma reconstrução possível do método e de uma possível chave, aplicando duas cifras de César com chaves diferentes para palavras em posições ímpares e pares (app 3.8) e para letras nessas posições (app 3.9). Esta última cifra é na realidade um exemplo particular daquilo que é conhecido como a cifra de Vigenère.

Apps para o grupo etário 15 a 19+ anos
Tópico matemático: troca de chaves

Todas as apps são construídas de modo a guiar o jovem estudante através da construção do método de troca de chaves de Diffie-Hellman. Em particular, a app 4.1 apresenta uma experiência guiada, na qual as etapas aritméticas já foram fornecidas. As apps 4.2 e 4.4 fornecem uma experiência semelhante, mas com menos etapas pré-concluídas: os estudantes devem verificar se a sua familiaridade com o assunto atingiu um nível adequado. A app 4.3 também ilustra o quão difícil é um possível ataque à cifra, reproduzindo a situação do ataque do "homem no meio" apresentado na história.

3. Indo mais além

O programa Mathina cobre uma parte da história da criptografia de chave privada, começando por apresentar a cifra de César. Um desenvolvimento adicional para o grupo de 7 a 10 anos é que professores e educadores podem explorar em sala de aula o quão pouco segura é essa cifra. Em particular, pode-se notar que escolher uma chave para a cifra de César significa escolher um número de 1 a 25 como chave. Isso deixa apenas 25 tentativas para um intruso quebrar a mensagem, sendo então um ataque de força bruta possível. Isso estende a atividade aos tópicos cobertos pela faixa etária de 11 a 14 anos.
Isto é possível uma vez que a criptografia geralmente não faz parte do currículo escolar e, portanto, pode ser usada como um bónus para atividades pós-letivas.

Um desenvolvimento adicional para o grupo de 11 a 14 anos é perguntar o quão segura é a cifra de Vigénère (note que este nome não é dado no programa Mathina aos estudantes), introduzindo a análise de frequência e técnicas semelhantes.

No que diz respeito a trocas de chaves, funções unidirecionais e criptografia de chave pública em geral, um desenvolvimento posterior pode ser proposto aos estudantes em relação a sistemas criptográficos como Kid-RSA (uma versão simplificada de RSA, usando conceitos matemáticos adequados para o grupo de 15 a 19 anos).

VISUALIZAÇÃO ESPACIAL: A TERRA DOS PÁSSAROS DE FOGO

Pelo termo "visualização espacial" referimo-nos a relações entre ideias simbólicas/algébricas e representações espaciais gráficas, como vetores ou funções. Na terra dos pássaros de fogo, concentramo-nos especificamente em maneiras de descrever e construir curvas no plano. Essa interação entre álgebra e geometria, fundamental na Matemática, é revisitada continuamente na educação matemática com diferentes ferramentas e pontos de vista.

É fundamental nas histórias de Mathina que os conceitos matemáticos sejam introduzidos às crianças muito mais cedo do que o esperado no sistema de educação formal, embora de uma forma mais superficial e oculta do que o esperado no sistema formal. No entanto, as histórias podem ser lidas (ou relidas) em qualquer idade, em particular no momento em que o sistema escolar introduz formalmente os conceitos subjacentes, e mesmo revisitando a história em estágios posteriores. Com um educador de apoio (professor, pai ...) dando dicas, novos aspetos podem ser apreendidos a partir das histórias em idades progressivamente mais maduras.

1. Conceitos Matemáticos Principais Implementados nas Histórias

Tópico: Curvas paramétricas

Nas apps de "O treinador de pássaros de fogo", um uni-dragão desenha uma curva no céu (um céu plano) a partir da direção que o utilizador dá continuamente como um vetor (com a varinha mágica/chifre). Na idade pretendida para a história (4-6 anos), a criança não consegue ler sem ajuda, estando a descobrir muitas formas básicas (círculos, quadrados, etc.) talvez pela primeira vez.

O que define uma forma? Normalmente, as formas são apresentadas às crianças como satisfazendo algumas condições:

Um triângulo equilátero é uma forma que possui três lados iguais. Um quadrado tem quatro lados iguais e ângulos iguais. Os pontos num círculo estão a uma distância fixa do seu centro. Mas quando pedimos a uma criança que desenhe um triângulo ou círculo, ela precisa de um método construtivo para mover o lápis no papel. Como se pode construir essas formas básicas (triângulo, quadrado, círculo ...), ou mais complexas como a forma de um 8? Ao dar uma direção a cada momento, estamos a dar um método de construção da forma. Para um quadrado, mantenha a direção "norte" por um tempo, depois "leste", depois "sul" e então "oeste". Por conseguinte, nalguns pontos precisamos virar bruscamente 90 graus o vetor direção. Para um triângulo equilátero, as direções formam ângulos diferentes (60 graus internamente, mas o vetor de direção deve girar 120 graus). Para um círculo, uma mudança contínua de direção é necessária. Para um "8" é necessária uma construção um pouco mais complicada. A criança desenvolve, assim, as ideias de ação à distância e codificação de informações, bem como alguma intuição espacial e coordenação mão-olho necessária para resolver os quebra-cabeças.

Numa fase seguinte (talvez por volta dos 10 anos), a criança pode trabalhar a ideia da velocidade física (e mais precisamente, a velocidade como vetor). Embora todos tenhamos uma ideia intuitiva através da nossa experiência cotidiana, não é nada intuitivo que possamos representar uma velocidade por meio de uma flecha.

Num estágio mais avançado, quando o estudante possui total habilidade algébrica para definir funções, e conhece noções como derivadas e integrais, estas apps ainda oferecem algumas reflexões úteis. A curva que o uni-dragão descreve no seu voo pode ser representada como uma curva paramétrica: as coordenadas do uni-dragão são $(x(t),y(t))$ no tempo t, e a direção da curva (o vetor tangente) tem componentes $(dx/dt, dy/dt)$.

O vetor tangente é, portanto, o vetor das derivadas das funções que definem a curva. Por outro lado, a curva é obtida do vetor tangente por integração. Numericamente, o que o programa faz é uma integração numérica. Se o vetor tangente é $(dx/dt, dy/dt)$, e a posição do uni-dragão é num dado momento (x,y), então o programa move o uni-dragão para a posição

$$(x,y) + (dx/dt, dy/dt) * dt = (x + dx, y + dy).$$

Aqui, dt é uma quantidade pequena (mas finita) e o processo é repetido muitas vezes por segundo.

Essa compreensão numérica do que o programa faz internamente ajuda a compreender as ideias centrais do cálculo infinitesimal, onde dt é uma representação simbólica de uma quantidade infinitamente pequena. A existência desses infinitesimais é contra-intuitiva e, às vezes, negada em algumas abordagens dedutivas. Muitas vezes, a expressão dx/dt é omitida em favor da notação usando uma plica, x', e infinitesimais substituídos por limites, que são historicamente posteriores e didaticamente mais intrincados.
Em resumo, o humilde vôo do uni-dragão pode ser usado numa ampla gama de fases da aprendizagem em Matemática, desde o construtivismo em geometria elementar até a teoria da integração.

Tópico: Aritmética vetorial
Nas apps "Falando com o uni-dragão" vai-se para além da ideia intuitiva de vetores e de velocidade dada em "O treinador de pássaros de fogo", adicionando a camada algébrica de representar um vetor, não apenas graficamente, mas também por um par de números. As apps permitem inserir (em sequência) uma série de pares de números que se transformam em setas que direcionam o voo do uni-dragão (ver figura 1).

Muitos conceitos podem ser aqui trabalhados: Primeiro, codificar as informações gráficas como números. Isto é equivalente a medir em duas dimensões (medir as componentes vertical e horizontal). Em segundo lugar, números negativos. Embora a idade em que as crianças aprendem sobre os números negativos na escola possa variar entre 7 e 11 anos, essa exposição inicial pode ser feita apenas supondo que o sinal negativo marca a direção "para trás". Na parte superior dessa faixa (11 anos), as crianças podem explorar a aritmética com números negativos. Assim, em terceiro lugar, as crianças podem explorar e descobrir que os vetores são lineares, ou seja, podem ser adicionados e subtraídos. Como não usamos cálculos vetoriais mais avançados (produtos escalares, normas, ângulos ...), podemos introduzir vetores ao mesmo tempo que as crianças aprendem sobre números negativos

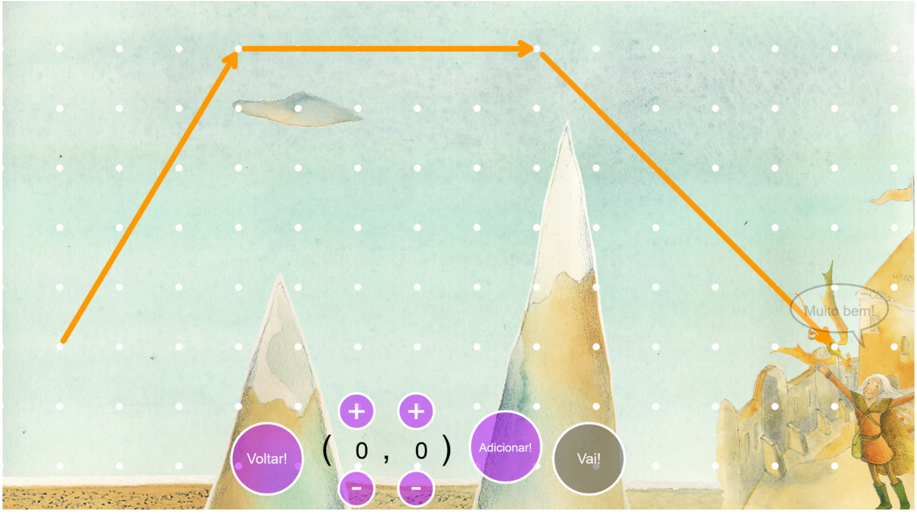


Figura 1

(duas etapas da educação separados por um longo período no sistema escolar formal). Introduzimos implicitamente as ideias de que um ponto mais um vetor dá outro ponto (geometria afim), e que podemos calcular trajetórias (poligonais) por este método.

Essas ideias (números negativos, aritmética vetorial ...) não devem ser expostas pelo educador nessas histórias, mas apenas dar uma dica e deixar a criança descobrir por si mesma, por meio de exploração.

Tópico: Funções e cálculo

Em "A corrida da fénix", introduzimos as funções de uma variável, y = f(x). Mudando o animal (fénix em vez do uni-dragão), fazemos uma distinção nas ferramentas de que dispomos agora para desenhar curvas explícitas.

Aqui supomos que o estudante (mais adolescente do que criança) já está familiarizado com as expressões algébricas básicas, equações do primeiro e segundo graus, e é capaz de fazer manipulações simbólicas.

A história oferece várias apps para desenhar curvas explícitas. A primeira app é um desenhador gráfico para funções polinomiais. Os coeficientes do polinómio podem ser ajustados para traçar uma dada curva que se pretenda desenhar. O estudante pode aprender por experimentação os diferentes papéis do termo independente, do termo de primeira ordem, do termo principal...

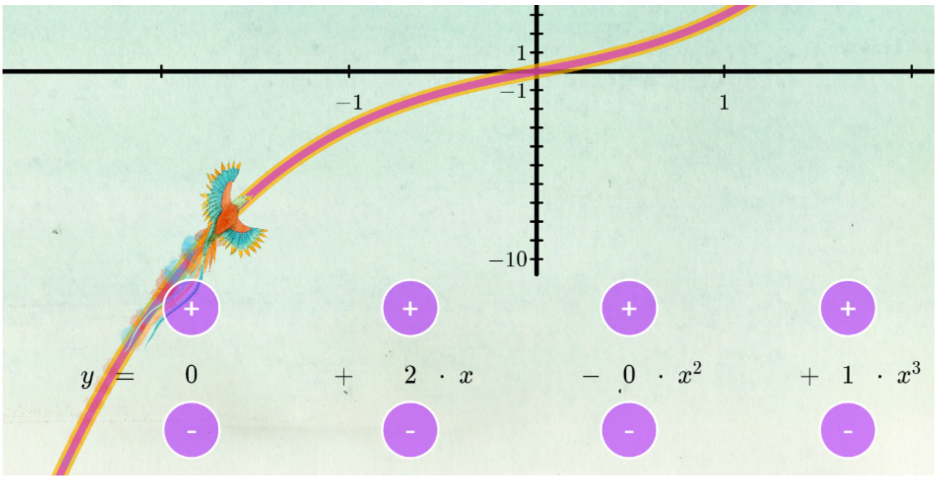


Figura 2

A segunda app (ver figura 3) fornece uma interpolação polinomial que passa por sete pontos dados. O utilizador pode ver a construção que torna isso possível. A app pede para construir um polinómio que atravesse os pontos dados, evitando certos obstáculos. Isso não é trivial devido ao chamado "fenómeno de Runge" [1].

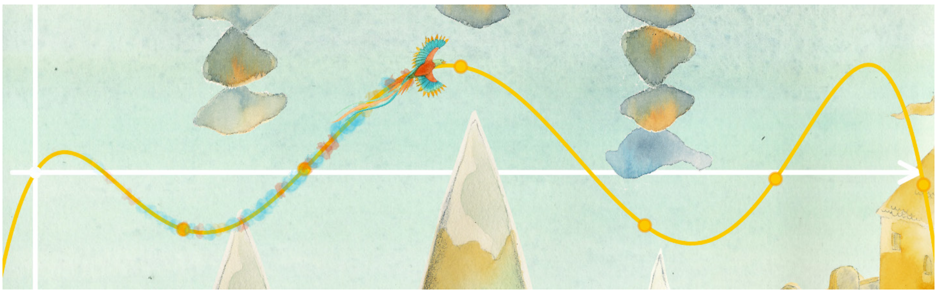


Figura 3

A terceira app explora a noção de derivada, semelhante à app em "O treinador de pássaros de fogo", mas muito mais explicitamente aqui, que podemos ver a derivada como a taxa de ascensão ou descida. O estudante pode descobrir por si mesmo a relação entre os máximos e mínimos da função e os zeros da derivada.

A quarta e última app mistura as duas técnicas que vimos: o utilizador é solicitado a usar uma interpolação polinomial para definir uma curva que é a derivada da nossa função objetivo, ou em outras palavras, o programa integra o polinómio.

A história explora todas essas noções graficamente, mas, neste nível, o educador pode pedir ao estudante que pegue em papel e lápis e resolva algumas questões algebricamente. Por exemplo:

- Como se pode generalizar a interpolação polinomial para passar por mais pontos?
- Como se pode construir um polinómio que passa em certos pontos dados onde o valor da derivada é dado?
- Como podemos definir "zeros duplos" de uma função? Como podemos identificá-los?
- Como é que o último programa faz o gráfico da função (em outras palavras, como é feita a integração numérica)?

Tópico: **Funções implícitas e geometria algébrica**
Nessa última história dos pássaros de fogo, voltada para os estudantes adolescentes mais maduros, o cenário é bem diferente. O cenário da floresta encantada, um pouco mais assustador, é mais adequado para adolescentes; a magia é menos espetacular, mas mais intrigante; e a ideia de faíscas como pontos únicos de luz no espaço, idealmente sem qualquer largura, requer mais abstração do que os grandes animais voando no céu. Além disso, no final da história, a Flama quebra a quarta parede, conversando com o leitor sobre Matemática e matemáticos do mundo real. Esperamos apelar desta forma para a maturidade dos leitores, que podem desfrutar a história da Mathina e do Leo na floresta, mas que encontrarão desafios mais estimulantes nas apps.

[1] Uma propriedade de interpolação polinomial segundo a qual um aumento no grau do polinómio de interpolação pode levar a uma deterioração na qualidade da interpolação (https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon).

A história usa esses animais microscópicos de luz, as faíscas, como elementos de desenho para traçar superfícies implícitas. Para uma função de duas variáveis F(x,y), a respetiva curva consiste de todos os pontos cujas coordenadas satisfazem F(x,y) = 0. Essa ideia é direta o suficiente para alunos de 15 anos, mas as implicações têm um longo alcance.

Depois de brincar um pouco com a app de exploração livre, seria apropriado que o educador comparasse esse método de descrição de curvas com os anteriores, inclusive brincando um pouco com as apps "O treinador de pássaros de fogo". O método da função implícita usa propriedades da curva para a definir, em vez de algum método construtivo de desenho. O exemplo do círculo é particularmente ilustrativo (veja os comentários e detalhes na plataforma Educadores).

Em seguida, seria bom desenvolver alguma intuição sobre as equações. A segunda app oferece um jogo de adivinhação que ajudará a fazer isso. Os professores podem adicionar mais exemplos e exercícios. Nessa altura, mais algumas técnicas e abordagens, assim como intuições, podem ser propostas pelo educador. Propomos aqui alguns:

- Mostre e pratique as técnicas de deformação, união e intersecção de curvas (veja a plataforma de Educadores). Essas técnicas abrirão possibilidades de combinar e alterar curvas existentes de uma forma direcionada e intencional, não apenas explorando os efeitos por tentativa e erro.
- A partir da técnica de deformação (desenhando a função F(x,y) - a = 0 para valores pequenos de a), desenhe várias curvas com diferentes valores de a. O educador pode então guiar a exploração em direção aos conceitos de gradiente e de vetor normal à curva. Em poucas palavras, o vetor normal para a curva F(x,y) = 0 é dado por (dF/dx, dF/dy).

A história termina com a construção análoga em três dimensões, para funções implícitas F(x,y,z) = 0. Dentro da história, a terceira app propõe apenas um pouco de exploração livre, mas um educador pode tirar proveito dessa ferramenta 3D em relação à atividade anterior:

- Use a ferramenta 3D para desenhar as superfícies z = F(x,y) no espaço tridimensional. Alguns bons exemplos são (ver figura 5): o cone z = sqrt(x^2+y^2), o parabolóide z = x^2 + y^2; a sela z = x^2 - y^2.
- Use uma interseção com um plano a diferentes alturas para relacionar isso com a curva F(x,y) = a. Por exemplo, desenhe (x^2 - y^2-z) * (z-a) = 0 e mova o primeiro slider para alterar o parâmetro a e, portanto, a altura do plano

de interseção (ver figura 6).

- Vá mais longe e explore o papel das derivadas parciais, por exemplo, com o ponto de sela.

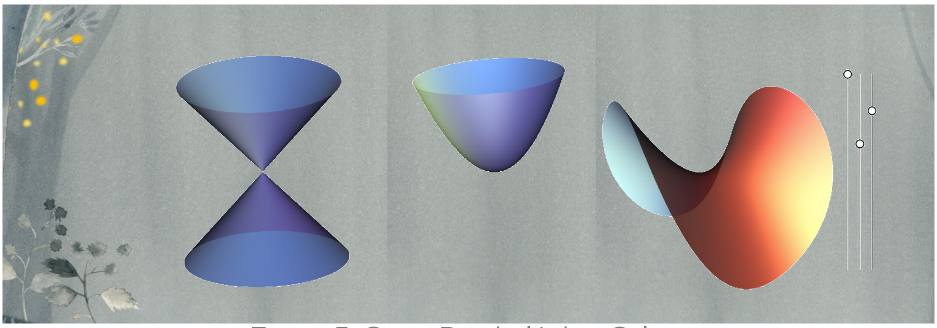


Figure 5: Cone, Parabolóide e Sela

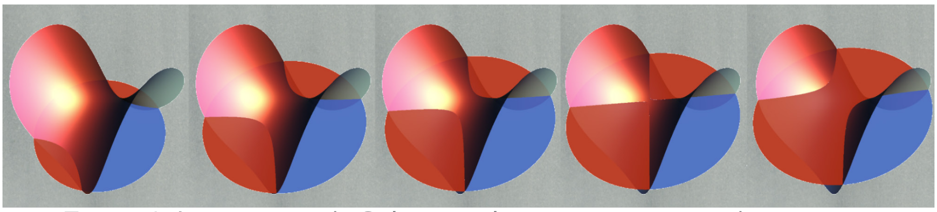


Figura 6: Interseções da Sela com planos com equação do tipo z=a

2. Indo mais além

Com todas as histórias de Mathina, pretendemos oferecer aos jovens estudantes algumas ferramentas que podem usar para explorar e usar mais da sua criatividade. As histórias fornecem um primeiro ponto de entrada para muitas ideias matemáticas, provavelmente mais cedo do que quando são estudadas na escola. No entanto, a sinergia entre as apresentações de Mathina e a orientação de um educador é o que, acreditamos, aumentará as capacidades matemáticas e o interesse dos estudantes. No final das histórias da Mathina, o educador poderá apresentar aos estudantes outras ferramentas mais versáteis, como por exemplo softwares de geometria dinâmica como GeoGebra ou Desmos, ou ainda sistemas de álgebra computacional mais poderosos, como SageMath. Isso capacitará os estudantes a levarem as suas próprias aventuras matemáticas para além das histórias de Mathina.

Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY